

COURS ALGÈBRE HOMOTOPIQUE
et
CATÉGORIES SUPÉRIEURES (2021-22, LMFI)

les mardi de 14h à 16h

et jeudi de 8h45 à 10h45

1^{er} cours le 3 janvier Dernier cours le 9 février

Pierre-Louis CURIEN
(IRIF)

curien@irif.fr

Site web pour le cours

<https://curien-galere.org>

Salon discord algèbre-homotopique-2nd-semester
under LMFI 2022-23

Prolongement du cours de 1^{er} semestre Théorie des catégories (MÉTAYER)

CATÉGORIES

ESPACES

THÉORIE de l'HOMOTOPIE

THÉORIE DES TYPES

Programmes

SS CURRY - HOWARD

preuves

Lien avec cours Preuves et programmes
Outils classiques
(BUCCIARELLI FAIGRAN)

Lien avec des cours

dans le parcours Maths Fondamentale

12-12/20 Homotopie 1 (AUSONI)

1-2/21 Homotopie 2 (HOREL)

Cours notes available from

<https://www.math.univ-paris13.fr/~vallette/Cours-MasterII-2021.html>

Transparents suivants :

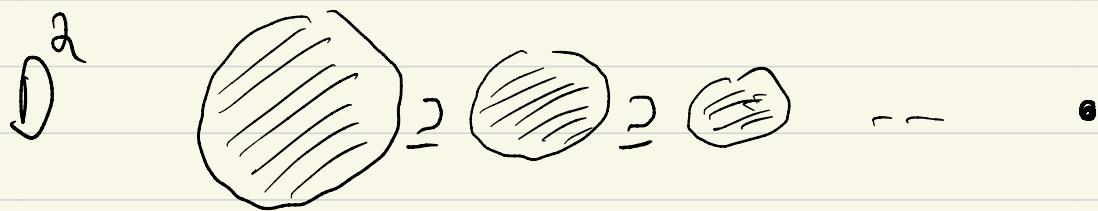
CATÉGORIES

ESPACES

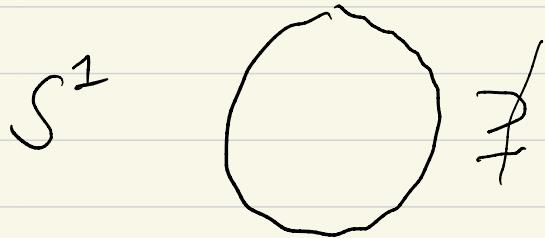
THÉORIE de l'HOMOTOPIE

Déformation des espaces par homotopie

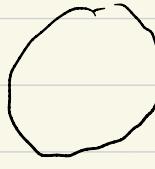
- Un disque se contracte en un point



- Une sphère ne se contracte pas !



MISMATCH (ou hiatus) entre
théorie de l'homotopie et théorie des catégories

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 & \longrightarrow & \{\ast\} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \cancel{D^2} & \xrightarrow{\text{P.O.}} & \cancel{S^2} \\
 \text{R} & & \cancel{X} \\
 \{\ast\} & & \{\ast\}
 \end{array}$$


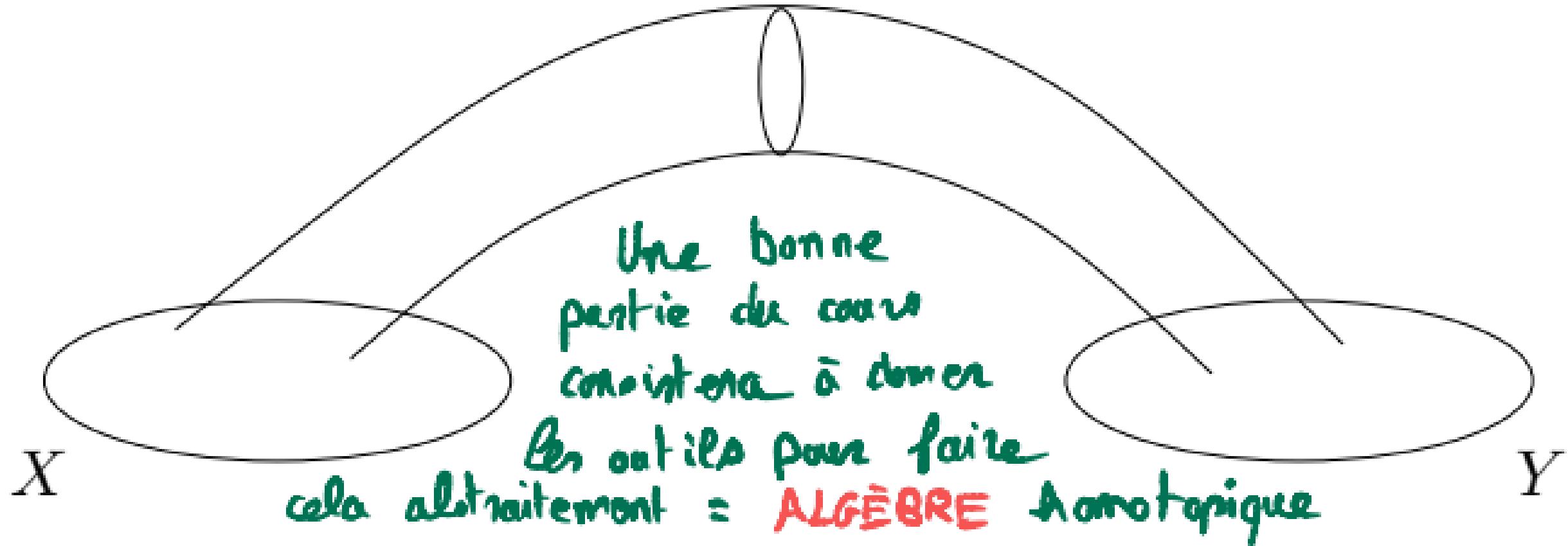
les sommes amalgamées (push-out) ne
préervont pas les équivalences d'homotopie

SOMME AMALGAMÉE HOMOTOPIQUE

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow & \nearrow \text{anology web} & \downarrow \\
 X & \longrightarrow & \text{page suivante!}
 \end{array}$$

P.O.

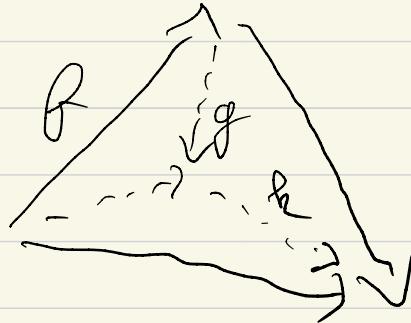
$$A \times I$$



réalisation
 Catégories $\xrightarrow{\text{nerf}}$ ensembles \rightarrow espaces
 simplifiaux
 et
 recollements
 de complexes

$$\begin{array}{ccc}
 f & \longrightarrow & g \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 f & \nearrow f,g & \searrow g \\
 & \downarrow g \circ f &
 \end{array}$$

$$f \longrightarrow g \longrightarrow h \vdash$$



Algèbre homotopique

Catégories de modèles

Catégories supérieures

\longleftarrow HOMOTOPIE

CATÉGORIES

Aperçu de

THÉORIE DES TYPES

CCC

\longleftrightarrow λ -calcul

(catégorie

cartésienne fermée)

Lccc

\hookrightarrow

types dépendants

{

(locallement)

List(n)

$\Sigma_n : \text{Nat} . \text{List}(n)$

\downarrow

\exists Nat

Nat

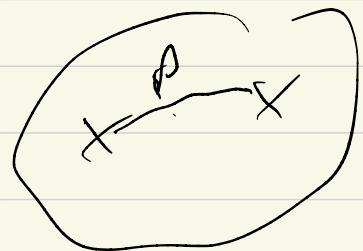
... n ...

fibrations

Théorie des types \rightarrow catégories supérieures

En théorie des types, il y a le type identité

$$x:A, y:A \vdash (x =_A y) \text{ type}$$



On peut itérer

$$x, y : A \quad p, q : x =_A y \vdash (p =_{(x =_A y)} q) \text{ type}$$



Tout type admet une structure d'« ∞ -groupeoïde faible»!

x, y objects

p, q morphisms

$d : p =_{x =_A y} q$ 2-morphisms

etc.

Au programme pour la partie I (algèbre homotopique)

- extensions de Kan
- ensembles simpliciaux
- catégories enrichies
- construction bar simpliciale et limites homotopiques
- catégories de modèles

Support principal (dispo en ligne):

E. Riehl, CATEGORICAL HOMOTOPY THEORY
www.math.jhu.edu/~eriehl/cathtpy.pdf)

Un programme pour la partie II

- Introduction to type theory and identity type weak factorisation system
- Models of extensional type theory and coherence issues
- A glimpse of HoTT (homotopy type theory) and the weak ∞ -groupoid of a type
- Cubical type theory (Cubicaltt et al.)
- Very recent stuff (Sattler, Gambino, ...) on model category structures arising from models of type theory
(involves **algebraic** weak factorisation systems)