

COURS ALGÈBRE HOMOTOPIQUE

et

CATÉGORIES SUPÉRIEURES (2021-22, LMF1)

les lundis de 8h45 à 10h45

1<sup>er</sup> cours le 3 janvier

Pierre-Louis CURIEN  
(IRIF)

curien@irif.fr

Site web pour le cours

<https://curien-galere.org>

Salon discord algèbre-homotopique-2nd-semester

# Prolongement du cours de 1<sup>er</sup> semestre Théorie des catégories (MÉTAYER)

CATÉGORIES

ESPACES

THÉORIE de l'HOMOTOPIE



THÉORIE DES TYPES

Lien avec cours Preuve et programmes  
Outils classiques  
(BUCCIARELLI - FAGGIANI)

Lien avec cours  
intensif HoTT (12 h)  
11-15 avril 2022

(HERBELIN - MELLIES - MORECHAY)

Lien avec des cours  
dans le parcours Maths Fondamentale

11-12/20 Homotopie 1 (VALLETTE)

1-2/21 Homotopie 2 (IDRISSI)

3-4/21 Catégories au pérverse (LIVERNET)

Cours notes available from

<https://www.math.univ-paris13.fr/~vallette/Cours-MasterII-2021.html>

Transparents suivants :

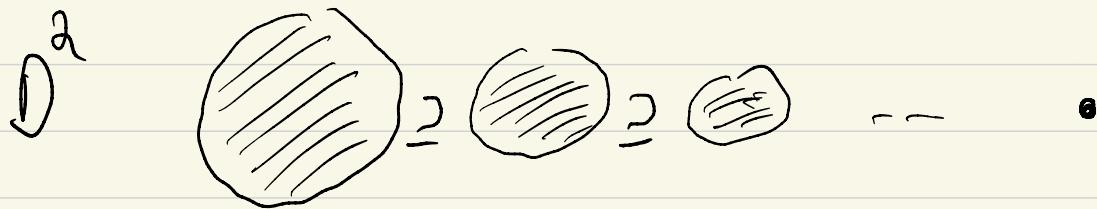
CATÉGORIES

ESPACES

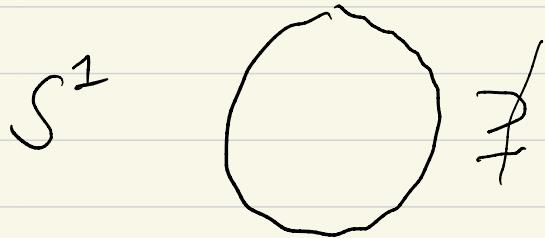
THÉORIE de l'HOMOTOPIE

# Déformation des espaces par homotopie

- Un disque se contracte en un point



- Une sphère ne se contracte pas !



MISMATCH (ou hiatus) entre  
théorie de l'homotopie et théorie des catégories

$$S^1 \longrightarrow \{\ast\}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$
 ~~$D^2$~~   $\xrightarrow{\text{P.O.}}$   ~~$S^2$~~ 
 $\begin{matrix} \text{R} \\ \{\ast\} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{X} \\ \{\ast\} \end{matrix}$

les sommes amalgamées (push-out) ne  
préervont pas les équivalences d'homotopie

SOMME AMALGAMÉE HOMOTOPIQUE

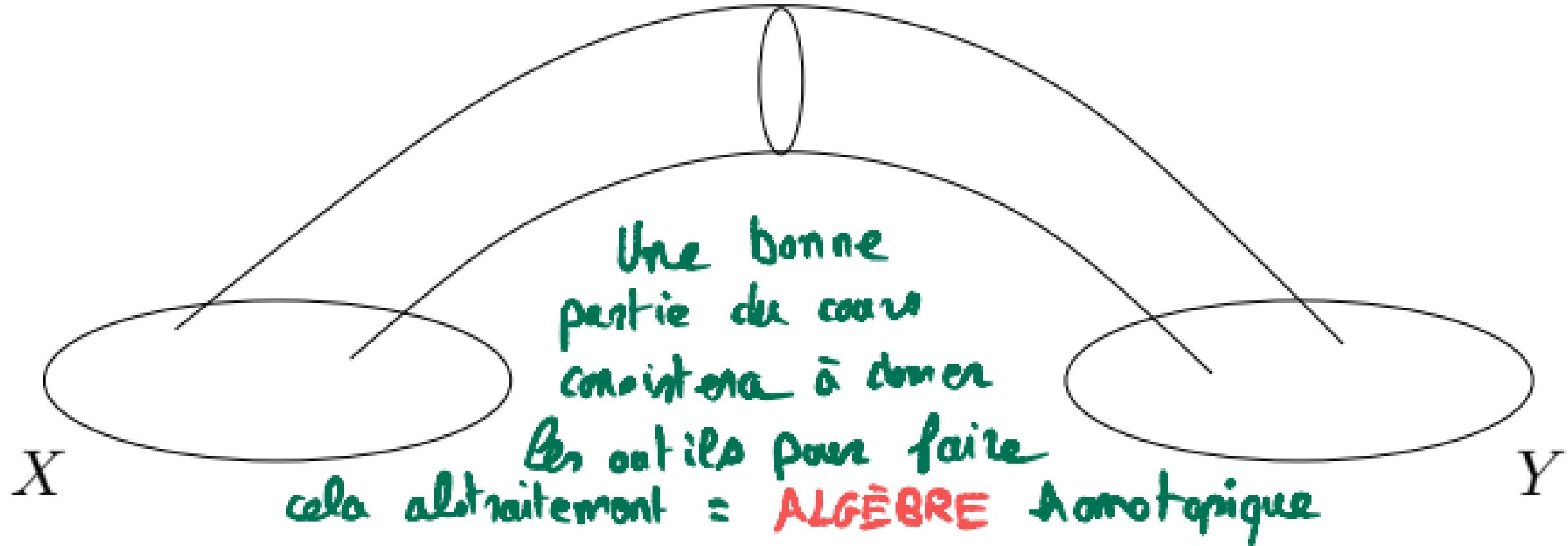
$$A \longrightarrow Y$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$X \longrightarrow \text{page suivante!}$$

R.P.O.

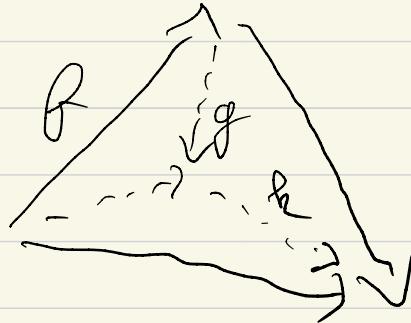
$$A \times I$$



réalisation  
 Catégories → nerf → ensembles → espaces  
 simplifiaux  
 et  
 recollements  
 de complexes

$$\begin{array}{ccc}
 f & \xrightarrow{\quad} & g \\
 \longrightarrow & \longmapsto & \downarrow \\
 & f & \nearrow f,g \quad \searrow g \\
 & & \downarrow g \circ f
 \end{array}$$

$$f \xrightarrow{\quad} g \xrightarrow{\quad} h \quad \vdash$$



Algèbre homotopique

Catégories de modèles

Catégories supérieures

HOMOTOPIE

# CATÉGORIES

Aperçu de

THÉORIE DES TYPES

CCC

$\longleftrightarrow$   $\lambda$ -calcul

(catégorie

cartésienne fermée)

Lccc

$\hookrightarrow$

types dépendants

{

(locallement)

List(n)

$\vdash n : \text{Nat}, \text{List}(n)$

↓

Nat

Nat

... n ...

fibraisons

Théorie des types → catégories supérieures

En théorie des types, il y a le type identité

$x:A, y:A \vdash (x =_A y) \text{ type}$

On peut itérer

$x, y : A \quad p, q : x =_A y \vdash (p =_{(x =_A y)} q) \text{ type}$

✓

Tout type induit une structure d'«<sup>1</sup>-groupoïde faible !

x y objects

## P/q morphisms

$d: \rho = \sum_{x \in A} q_x$  2-morphisms

etc.

# Au programme pour la partie I (algèbre homotopique)

- 1 ● extensions de Kan
- 2 ● ensembles simpliciaux
- 3 ● catégories enrichies
- 4,5 ● construction des simplicial et limites homotopiques
- 6 ● catégories de modèles

Support principal (dispo en ligne):

E. Riehl, CATEGORICAL HOMOTOPY THEORY  
[www.math.jhu.edu/~eriehl/cathtpy.pdf](http://www.math.jhu.edu/~eriehl/cathtpy.pdf) )

## Un programme pour la partie II

- 7 ● Introduction to type theory and identity type weak factorisation system
- 8 ● Models of extensional type theory and coherence issues
- 9 ● A glimpse of HoTT (homotopy type theory) and the weak  $\infty$ -groupoid of a type
- 10 ● Cubical type theory (Cubicaltt et al.)
- 11,12 ● Very recent stuff (Sattler, Gambino, ...) on model category structures arising from models of type theory  
(involves **algebraic** weak factorisation systems)